

Применение матриц Адамара в однопиксельной визуализации

Д.В. Сыч¹

Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, Ленинский пр-т, 53, 119991 Москва, Россия

¹ ORCID: 0000-0002-4188-0951, denis.sych@gmail.com

Аннотация

Однопиксельная визуализация — новый метод вычислительной визуализации, позволяющий получать изображения объектов с использованием фотодетектора, не имеющего пространственного разрешения. Объект в таком методе освещается светом, имеющим специальную пространственно-временную структуру, — световыми паттернами, а однопиксельный фотодетектор измеряет общее количество отраженного от объекта света. Возможность получения изображения и его качество тесно связаны со свойствами применяемых паттернов и вычислительными алгоритмами. В данной работе мы рассматриваем паттерны, полученные из модифицированных матриц Адамара, и изучаем особенности вычисления изображений методом однопиксельной визуализации с их использованием. Мы показываем возможность уменьшения как времени сэмпирования, так и вычислительных ресурсов, требуемых для получения изображений, за счет модификаций системы паттернов. Предложенный теоретический метод может быть использован при практической реализации метода однопиксельной визуализации в эксперименте.

Ключевые слова: однопиксельная визуализация, вычислительная визуализация, матрицы Адамара.

1. Введение

Стандартные методы построения изображений, или визуализации, используют светочувствительные элементы с пространственным разрешением, например, фотопленку или электронные матричные сенсоры. Однопиксельная визуализация (ОВ) — это альтернативный метод построения изображений, в котором светочувствительный элемент не имеет пространственного разрешения, то есть представлен всего одним пикселем. Изображение в таком методе не регистрируется светочувствительным элементом, а вычисляется [1].

Использование всего лишь одного пикселя имеет ряд преимуществ по сравнению с матрицей. Во-первых, спектральная чувствительность однопиксельного детектора может быть выбрана из очень широкого диапазона, в отличие от матрицы. Если рассматривать только видимый и ближний инфракрасный диапазон света, то существующая технология массового производства кремниевых матриц делает их вне конкуренции по цене, разрешению, быстродействию. Однако если интересует спектральный диапазон вне спектральной чувствительности кремния, то характеристики существующих матриц сильно ухудшаются по сравнению с кремниевыми. Например, на данный момент доступны относительно недорогие кремниевые матрицы с разрешением в десятки мегапикселей, в то время как в коротковолновом инфракрасном диапазоне (в районе длины волны 1,5 микрона) или длинноволновом инфракрасном диапазоне (в районе длины волны 10 микрон) разрешение лучших матриц составляет около 1 мегапикселя,

цена при этом возрастает на порядки, и их практическая доступность сильно ограничена.

Во-вторых, режим работы однопиксельного детектора также гораздо более гибок. Например, это может быть детектор, работающий в режиме счета одиночных фотонов, что актуально для регистрации очень слабых сигналов на однофотонном уровне в задачах квантовой информатики. Детектирование таких сигналов в телекоммуникационном коротковолновом инфракрасном диапазоне представляет собой технически сложную задачу. Одним из современных решений является матрица на основе массива сверхпроводниковых детекторов с разрешением 1 килопиксель (32 на 32 пикселя) [2]. Использование однопиксельной визуализации позволило получить такое же разрешение гораздо проще, с использованием только одного сверхпроводникового детектора [3]. Кроме того, с одним детектором гораздо проще реализовать новые типы детектирования, например, различать слабые сигналы с минимальной ошибкой [4-7].

Отличительной чертой однопиксельной визуализации является то, что изображение в таком подходе вычисляется на основе использования последовательности разных световых паттернов. При этом измеряется не пространственное распределение интенсивности света (что делает матрица), а его интегральное количество, соответствующее каждому паттерну. Поэтому важным элементом системы однопиксельной визуализации является вычислительные ресурсы, без которых метод работать не может. Современные вычислительные алгоритмы могут восстанавливать изображение даже при неполном наборе измерений методами сжатого сэмплирования [8,9] или машинного обучения [10-13]. К условным недостаткам метода однопиксельной визуализации можно отнести то, что разрешение вычисленного изображения обычно невысоко. Возможности технологии ОВ обычно демонстрируются на малых разрешениях, например, 32 на 32 пикселя, и редко превышают 128 на 128 пикселей. Это связано с тем, что увеличение разрешения требует увеличения времени сбора данных (требуется большее количество световых паттернов) и больших вычислительных ресурсов для работы алгоритмов построения изображения.

В данной работе мы исследуем вопрос о возможностях сокращения количества паттернов и повышения разрешения изображений в методе ОВ за счет применения световых паттернов на основе модификаций матриц Адамара. В частности, мы показываем, какие возникают ограничения, связанные вычислительными ресурсами ОВ, и как их можно преодолеть с применением модифицированных матриц Адамара. Также мы предлагаем новые подходы к повышению разрешения ОВ с учетом реалистичной ограниченности вычислительных ресурсов.

2. Масштабирование разрешения изображения в методе однопиксельной визуализации

Начнем с основных определений метода ОВ. Искомое изображение объекта традиционно представляется в виде матрицы O , каждый элемент которой — это пиксель искомого изображения. В случае цветных изображений пиксель состоит из трех значений яркости красного, зеленого и синего каналов; в случае серых изображений пиксель представляется одним значением общей яркости, нормированным от 0 до 1, где 0 соответствует черному цвету, а 1 — белому. Мы будем рассматривать последний случай (серые изображения), и для простоты изображение будем считать квадратным с размером $n \times n$ пикселей. Таким образом, в рассматриваемом нами случае общее число элементов в матрице O равно $N = n^2$ вещественных чисел от 0 до 1.

Объект освещается пространственно-неоднородным светом (объект сэмплируется световым паттерном), который имеет некоторое распределение яркости по объекту, которое можно также представить в виде матрицы p размером $n \times n$, элементы которой нормированы от 0 до 1, где 0 — минимальная (нулевая) освещенность, а 1 — макси-

мальная освещенность. Будем называть пиксель с максимальной яркостью (единица) светлым, а с минимальной (ноль) — темным.

Далее, мы измеряем общее количество отраженного от объекта света (или же величину, пропорциональную ему), что определяется покомпонентным произведением матриц $s = \sum_{i,j=1}^n p_{ij} O_{ij}$. Измеренный таким образом сигнал представляет собой одно вещественное число, причем оно тем больше, чем лучше совпадение темных и светлых пикселей объекта и светового паттерна.

Последовательно меняя паттерны p_k и измеряя соответствующие им сигналы s_k , мы можем составить систему линейных уравнений вида

$$P * O = S, \quad (1)$$

где $P = \{p_1, p_2, \dots, p_M\}$ — это матрица размером $M \times N$, где каждая строка длиной N состоит из одномерного представления светового паттерна с построчной нумерацией всех пикселей в паттерне, O — столбец из N элементов (пиксели искомого изображения, пронумерованные одним индексом построчно), и $S = \{s_1, s_2, \dots, s_M\}$ — столбец из M измеренных сигналов. Тогда вычисление, или восстановление, изображения объекта O представляет собой решение системы линейных уравнений (1). Стандартный способ решения системы линейных уравнений (1) в матричном виде представляется как

$$O = P^{-1} * S. \quad (2)$$

Для этого требуется, чтобы матрица P была квадратной, то есть число паттернов должно быть равно числу пикселей в искомом изображении, и все паттерны должны быть линейно независимы (детерминант P отличен от нуля).

Неочевидный момент связан с вычислением обратной матрицы P . Матрица P в общем виде — это матрица освещенности каждого пикселя в каждом паттерне. Пространственно-неоднородные световые паттерны физически можно реализовать разными способами. На квантовом уровне можно управлять пространственно-временной формой волновой функции отдельных фотонов [14-16]. На уровне классического света можно использовать случайную спекл-картину [17], или же создавать произвольное распределение света с помощью пространственного модулятора света [18]. Существуют две основные технологии производства цифровых пространственных модуляторов света: жидкокристаллические и микрозеркальные. В обоих случаях изначально однородный свет попадает на матрицу элементов, отражение или пропускание которых можно контролировать независимо друг от друга. В случае жидкокристаллических модуляторов коэффициент пропускания света может непрерывно меняться от 0 до 1, а в случае микрозеркальных модуляторов коэффициент отражения меняется дискретно: либо 0, либо 1. Соответственно, в первом случае можно создать матрицу P из вещественных коэффициентов, а во втором — из целых.

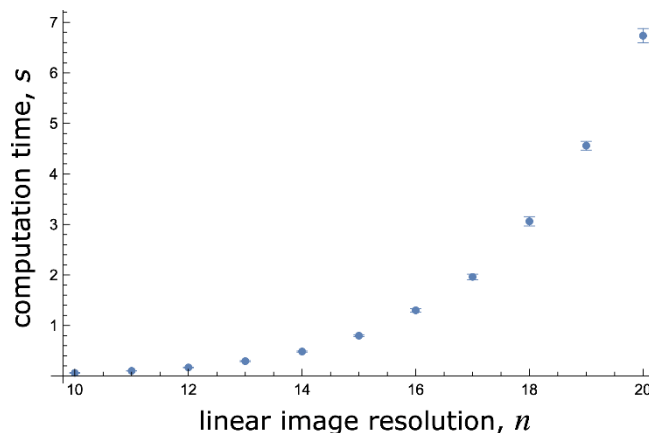


Рис. 1: Время вычисления обратной матрицы P^{-1} (в секундах) в зависимости от линейного размера восстанавливаемого изображения n . Показаны статистические средние значения и стандартное отклонение для набора из 30 случайных матриц каждого размера.

Как мы уже отметили, размер матрицы P определяется желаемым разрешением итогового изображения. Для получения изображения O размером $n \times n$ пикселей требуется обратить матрицу P размером $n^2 \times n^2$, что приводит к быстрому росту необходимых вычислительных ресурсов. Рассмотрим масштабирование времени обращения случайной матрицы, состоящей из 0 и 1 (аналогичные результаты мы получили и для случайных матриц из вещественных чисел от 0 до 1), при использовании обычного ноутбука средней комплектации (четырёхядерный процессор Core i5, 1,4 GHz). Вычисления проводились в Wolfram Mathematica с использованием стандартной функции Inverse[P]. Для разных n создавались 30 случайных матриц P размером $n^2 \times n^2$ и измерялось время обращения каждой матрицы. На рис. 1 показаны результаты вычислений для n в диапазоне от 10 до 20, из которых видно, что добавление двух пикселей к линейному разрешению изображения фактически удваивает время вычисления обратной матрицы. Если для паттернов размером 16 на 16 пикселей (то есть матрицы P размером 256 на 256) время вычисления составляет примерно 1 секунду, то для паттернов размером 32 на 32 — несколько минут, а для паттернов 50 на 50 — около суток. Несмотря на то, что скорость вычислений в принципе можно увеличить за счет выбора другого программного или аппаратного обеспечения, полученный характер масштабирования времени вычислений означает, что сильно увеличить разрешение изображения в таком подходе на практике нельзя. Даже учитывая, что вычислять обратную матрицу нужно лишь один раз, и потом требуется только матричное умножение обратной матрицы на измеренную последовательность сигналов, время вычисления обратной матрицы все же является ограничивающим фактором для получения достаточного большого разрешения, например 100 на 100 пикселей и больше.

3. Матрицы Адамара и их модификации для однопиксельной визуализации

Одно из возможных решений проблемы получения изображений высокого разрешения методом ОБ состоит в использовании матриц, для которых известно аналитическое выражение для обратной матрицы. Очевидным случаем является выбор $P = E_N$, где E_N — единичная матрица размером $N \times N$. Несомненным достоинством такого выбора является крайне простой способ восстановления изображения $O = S$. Каждый паттерн при этом состоит из всего лишь одного светлого пикселя, и в разных паттернах этот светлый пиксель меняет свой индекс, то есть при таком выборе паттернов объект последовательно “сканируется” одним “бегущим” пикселем, а количество отраженного света непосредственно соответствует изображению объекта. Недостатком такого выбора паттернов является малое количество отраженного света, так как освещается всего лишь один пиксель из n^2 , что на практике приводит к малому соотношению сигнал/шум [3,18,19].

Для увеличения соотношения сигнал/шум, желательно выбирать матрицу P так, чтобы количество светлых пикселей было больше. Частым выбором матриц системы паттернов для ОБ на практике являются матрицы Адамара. Согласно стандартному определению, матрица Адамара H_N — это квадратная матрица, состоящая из +1 и -1, строки которой ортогональны друг другу. Одним из свойств матриц Адамара является возможность быстрого вычисления обратной матрицы H_N^{-1} , исходя из свойства ортогональности: $H_N * H_N^T = N \cdot E_N$. Согласно гипотезе Адамара, матрицы Адамара существуют для всех N кратных 4, хотя для целей ОБ вопрос построение матриц Адамара произвольного размера не принципиален. Как мы уже отметили, мы можем рассматривать квадратные изображения с линейным размером, равном степени двойки (16 на 16, 32 на 32 и т.д.): $n = 2^d$. В таком случае существует явное построение матриц Адамара в рекурсивном виде (построение Сильвестра):

$$H_{d+1} = \begin{pmatrix} H_d & H_d \\ H_d & -H_d \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Здесь индекс d для матрицы Адамара H_d означает матрицу размером $2^d \times 2^d$, а в правой части скобками показана матрица составленная из четырех матриц, то есть линейный размер H_{d+1} в два раза больше линейного размера H_d . На первом шаге такого рекурсивного построения будет матрица из одного элемента $H_0 = 1$. Заметим, что подобное рекурсивное построение встречается и других областях, например, при построении полного набора обобщенных Бэлловских состояний [20].

Важным свойством матриц Адамара является то, что эти матрицы обладают наибольшим детерминантом среди всех матриц с элементами ± 1 . Это означает, что система (1) является хорошо обусловленной и ее решение при численных вычислениях и шуме в измеренном сигнале будет стабильно.

Для реализации обращения матрицы H_d через ее транспонирование, можно нормировать ее элементы так, чтобы детерминант был равен 1. Тогда элементы матрицы будут равны не ± 1 , а $\pm 1/2^{d/2}$. Обращение такой модифицированной матрицы Адамара $H'_d = H_d/2^{d/2}$ — это операция транспонирования $(H'_d)^{-1} = (H'_d)^T$, что вычислительно не сложно даже при большом разрешении.

Проблема с реализацией матрицы системы паттернов в ОВ в виде матриц Адамара состоит в том, что это матрица из положительных и отрицательных чисел (± 1 для H_d или $\pm 1/2^{d/2}$ для H'_d), а световые паттерны должны состоять из неотрицательных чисел, поскольку они связаны с освещенностью (или пропусканием света через пространственный модулятор света), которая не может быть отрицательной.

По этой причине в ОВ вместо одного паттерна, сформированного из матрицы Адамара, используют два паттерна. Первый паттерн из этой пары состоит из строки матрицы Адамара, где отрицательные элементы заменяются на 0, а второй паттерн из этой пары получается из первого паттерна заменой 0 на 1 и 1 на 0, то есть второй паттерн инвертируется по яркости относительно первого. Далее, измеряются два сигнала s^+ и s^- , соответствующие первому и второму паттерну, и берется разность этих сигналов $s^+ - s^-$. Этот разностный сигнал эффективно соответствует паттерну, состоящему из $+1$ и -1 , то есть исходной матрице Адамара. Действительно, если рассмотреть попиксельную разность таких паттернов, то в случае, когда данный пиксель в первом паттерне равен 1, во втором он будет равен 0, и разность равна $1 - 0 = +1$. Если же данный пиксель в первом паттерне равен 0, то во втором он будет равен 1, и разность равна $0 - 1 = -1$. Таким образом, для реализации системы паттернов в ОВ в виде матрицы Адамара показывается удвоенный набор паттернов, что вдвое увеличивает время экспонирования объекта.

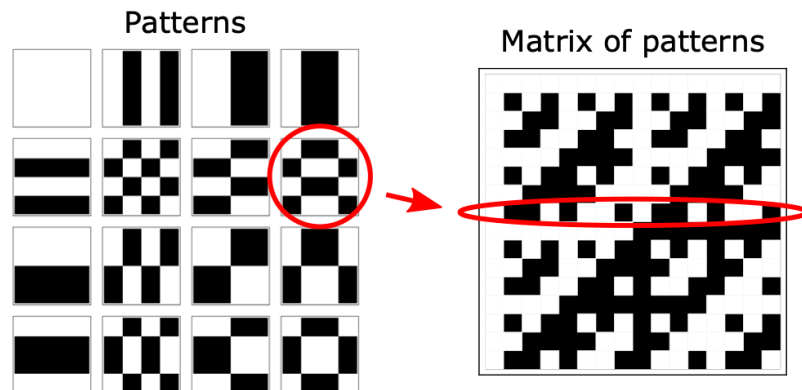


Рис. 2: Набор квадратных паттернов размером 4 на 4 пикселя (слева), построенных на основе модифицированной матрицы Адамара размером 16 на 16 (справа). Для наглядности восьмой паттерн выделен графически, и показано его соответствие восьмой строке в матрице Адамара: построчно нумерованные пиксели в паттерне составляют строку в матрице Адамара.

На Рис. 2 слева показаны паттерны, сформированные из строк матрицы Адамара с заменой -1 на 0 . Для наглядности выбран размер изображения 4 на 4 пикселя, соответственно, матрица Адамара (показана справа) имеет размер 16 на 16 . В качестве примера восьмой паттерн выделен графически, и показано его соответствие восьмой строке в матрице Адамара.

Обратим внимание на ряд особенностей паттернов на базе матриц Адамара. Первый паттерн для любого разрешения всегда полностью светлый, так как первая строка в матрице Адамара состоит только из $+1$. Соответственно, первый пиксель в каждом паттерне также всегда светлый (первый столбец в матрице Адамара состоит только из $+1$). Далее, для каждого паттерна в наборе существует транспонированный ему паттерн. На Рис. 2 паттерны упорядочены в виде таблицы 4 на 4 , и пары “паттерн — транспонированный ему паттерн” заметны как симметричные пары относительно диагонали таблицы. Некоторые паттерны совпадают со своими транспонированными (показаны по диагонали таблицы). Важным достоинством паттернов на базе матриц Адамара является то, что количество светлых и темных пикселей во всех паттернах одинаково (кроме полностью светлого первого паттерна), что сильно увеличивает соотношение сигнал/шум в практической реализации системы ОВ.

Как мы отметили выше, стандартное использование матриц Адамара в ОВ требует удвоенного набора паттернов. Покажем способ уменьшить требуемый набор и оставить число паттернов равным числу пикселей в изображении. Заметим, что если взять не разность сигналов s^+ и s^- , а сумму $s_1 = s^+ + s^-$, то результат будет соответствовать паттерну, состоящему только из светлых пикселей ($1 + 0 = +1$ и $0 + 1 = +1$), который является первым паттерном из матрицы Адамара. Тогда мы можем не измерять сигнал s^- , а считать его как $s^- = s_1 - s^+$, тогда искомый разностный сигнал будет $s^+ - s^- = 2s^+ - s_1$. В таком случае нет необходимости показывать удвоенный набор паттернов и время экспонирования по сравнению со стандартным способом сокращается вдвое.

Заметим, что обратная матрица P^{-1} в таком подходе уже не равна транспонированной. Для модификации матрицы Адамара H' с нормировкой детерминанта на 1 мы имеем матрицу

$$P = (H' \cdot 2^{d/2} + 1)/2, \quad (4)$$

тогда обратная ей матрица равна

$$P^{-1} = H'/2^{(d-2)/2} \quad (5)$$

с заменой первого элемента на $1/2^{d-1} - 1$.

Полученная связь между матрицами Адамара, определенными рекурсивным построением (3), и матрицей P^{-1} , позволяет существенно упростить вычисление изображения O по сравнению с методом непосредственного матричного умножения (2). Дело в том, что для матричного умножения требуется хранить всю матрицу в памяти компьютера, что для большого числа пикселей в изображении требует больших вычислительных ресурсов. Например, для изображения 100 на 100 пикселей матрица P имеет размер 10000 на 10000 , что составляет 10^8 элементов, которые требуется вычислить и сохранить в памяти. Однако достаточно простая линейная связь между матрицами (3), (4) и (5) позволяет вычислять коэффициенты матрицы P^{-1} поэлементно независимо друг от друга. Из построения (3) можно получить непосредственное выражение для элементов нормализованной матрицы Адамара в виде

$$(H'_d)_{mn} = \frac{1}{2^{d/2}} (-1)^{\sum_k m_k n_k}, \quad (6)$$

где последовательности m_k и n_k — бинарное представление чисел m и n (номер строки и столбца), соответственно. Такое поэлементное вычисление позволяет избежать вычисления и хранения сразу всей матрицы P^{-1} , что крайне удобно при реализации вычисления изображения в готовом устройстве ОВ на уровне микроконтроллеров и программируемых логических интегральных схем.

4. Блочное сэмплирование

Получение изображений с высоким разрешением путем выбора матриц Адамара очень большого размера является не самым оптимальным решением с практической точки зрения. Проблема связана с тем, что при разрешении изображения, например, 256 на 256 пикселей требуется 65536 паттернов состоящих из 65536 бит, что требует примерно полгигабайта памяти, с соответствующим масштабированием при выборе еще большего разрешения. Для управляющей электроники цифровых пространственных модуляторов света это может вызвать сложности с реализацией.

Рассмотрим другой подход к масштабированию разрешения изображения с разбиением исходного изображения на блоки. Идея состоит в том, что мы можем сэмплировать исходное изображение не сразу целиком, а по отдельным частям, например, прямоугольными блоками. Заметим, что при получении одномерного представления светового паттерна (1) мы использовали квадратные матрицы для изображения объекта в связи с использованием матриц Адамара с линейным размером, равным степени двойки. При обратном преобразовании мы можем разбить столбец O на матрицу не обязательно квадратного вида. Например, для изображения 8 на 8 пикселей требуется 64 паттерна, каждый из которых представлен бинарной матрицей 8 на 8. Однако мы можем использовать блочное разбиение изображения на 4 части, каждая размером 4 на 4 или 8 на 2, и сэмплировать каждую часть паттернами на основе матрицы Адамара 16 на 16, аналогично тому, как сэмплируется квадратное изображение размером 4 на 4. Предельный случай такого разбиения будет представлять собой набор из 16 одномерных изображений размером 16 на 1.

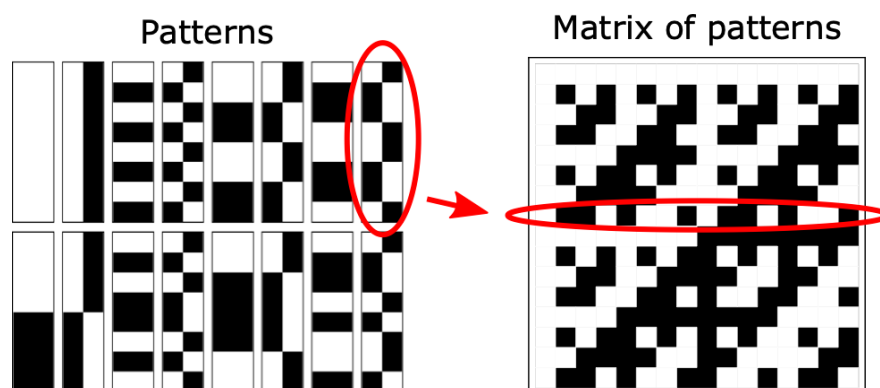


Рис. 3: Набор прямоугольных паттернов размером 8 на 2 пикселя (слева), построенных на основе модифицированной матрицы Адамара размером 16 на 16 (справа). Для наглядности восьмой паттерн выделен графически, и показано его соответствие восьмой строке в матрице Адамара: построчно нумерованные пиксели в паттерне составляют строку в матрице Адамара.

Для наглядной иллюстрации, на Рис. 3 слева показаны прямоугольные паттерны размером 8 на 2, сформированные из строк матрицы Адамара размером 16 на 16 с заменой -1 на 0 . В качестве примера восьмой паттерн выделен графически, и показано его соответствие восьмой строке в матрице Адамара, аналогично Рис. 2.

Время полного сэмплирования изображения при этом определяется суммой времен сэмплирования всеми блоками паттернов, а время вычисления изображения — суммой времен вычисления всех блоков изображения. В случае матриц Адамара мы используем полный набор паттернов, поэтому общее время сэмплирования не меняется по сравнению с сэмплированием матрицей Адамара большего размера, а вот время вычисления изображения уменьшается, так как требуются матричные операции меньшего размера. Например, вычисление изображения размером 1024 на 1024 требует матричное умножение с размером матрицы $2^{20} \times 2^{20}$, что нереалистично. В нашем подходе для получения такого разрешения можно провести блочное сэмплирование с 64 бло-

ками размером $128^2 = 16384$ пикселей, что достаточно легко реализовать на компьютере средней комплектации. Заметим, что общее вычисление всех отдельных блоков может быть реализовано более эффективно при использовании специализированного аппаратного и программного обеспечения, например, графических карт и параллельного программирования.

Данный подход может быть реализован в экспериментальной установке, принципиальная схема которого показана на Рис. 4. Для получения высокого разрешения объекта (схематично изображенное дерево), пространственный модулятор света создает световые паттерны, имеющие неодинаковое разрешение по вертикали и горизонтали (в данном примере вертикальное разрешение выше горизонтального). Далее сэмплируется и восстанавливается та часть объекта, которая перекрывается такими паттернами. После чего последовательность используемых паттернов повторяется снова, но смещается по координате с меньшим разрешением. Таким образом восстанавливается изображение всего объекта, итоговое разрешение которого может быть существенно выше разрешения системы используемых паттернов.

Отметим, что помимо более простой реализации с учетом реалистичных ограничений управляющей электроники, предложенный метод открывает ряд новых возможностей. Например, таким способом можно получать неоднородное разрешение по всему полю изображения. В частности, при восстановлении изображения можно анализировать какие части изображения имеют мелкомасштабные структуры (соседние пиксели сильно отличаются по интенсивности), и далее увеличивать разрешение блоков паттернов только на этих частях изображения. В результате можно существенно сократить время сэмплирования, получив при этом высокую детализацию объекта. Также предложенный метод можно использовать в сочетании с другими методами восстановления изображения, например, сжатым сэмплированием [21].

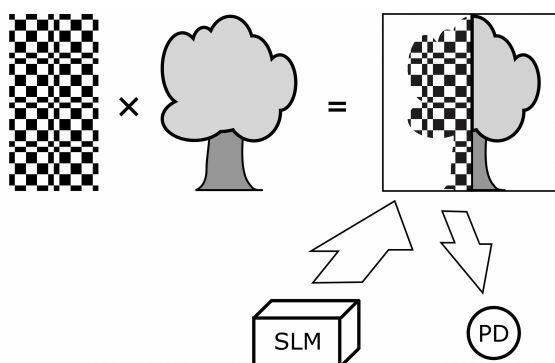


Рис. 4: Схематичное представление возможной экспериментальной реализации однопиксельной визуализации с блочным сэмплированием. Для получения изображения объекта пространственный модулятор света (SLM) создает световой паттерн высокого разрешения по одной из координат (в данном случае, по вертикали), в то время как по другой координате разрешение уменьшается. Такой паттерн перекрывает лишь часть объекта, фотодетектор (PD) измеряет количество света только от данной освещенной части объекта, и изображение восстанавливается только по этой части. Далее паттерн смещается по горизонтальной координате, и процесс сэмплирования повторяется.

Заключение

Мы рассмотрели метод однопиксельной визуализации с применением световых паттернов, полученных на основе модифицированных матриц Адамара. Мы показали, что можно сократить время сэмплирования объекта за счет уменьшения количества паттернов по сравнению со стандартным подходом, используемым в большинстве современных работ. Для этого мы модифицировали как матрицу самих паттернов, так и обратную ей матрицу, а также изменили процедуру проведения измерений сигналов с

однопиксельного детектора. Если же зафиксировать время сэмплирования, то предлагаемый метод позволит улучшить качество изображения за счет увеличения соотношения сигнал/шум. Для предложенной модификации матрицы паттернов мы показали процедуру вычисления изображения без непосредственного полного вычисления целиком всей обратной матрицы. Далее, мы показали, что методом однопиксельной визуализации с матрицами Адамара при реалистично ограниченных вычислительных ресурсах можно получать изображения большого разрешения за счет применения блочного сэмплирования, с соответствующей модификацией применяемых световых паттернов.

Программное обеспечение, разработанное и используемое в данной статье, не имеет лицензионных ограничений.

Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-22-00381, <https://rscf.ru/project/23-22-00381/>.

Список литературы

1. M. F. Duarte, M. A. Davenport, D. Takhar, J. N. Laska, T. Sun, K. F. Kelly, and R. G. Baraniuk, "Single-pixel imaging via compressive sampling," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 25, no. 2, pp. 83–91, 2008.
2. E. E. Wollman, V. B. Verma, A. E. Lita, W. H. Farr, M. D. Shaw, R. P. Mirin, and S. W. Nam, "Kilopixel array of superconducting nanowire single-photon detectors," *Opt. Express*, vol. 27, pp. 35279–35289, 2019.
3. M. Shcherbatenko, M. Elezov, N. Manova, K. Sedykh, A. Korneev, Y. Korneeva, M. Dryazgov, N. Simonov, A. Feimov, G. Goltsman, and D. Sych, "Single-pixel camera with a large-area microstrip superconducting single photon detector on a multimode fiber," *Applied Physics Letters*, vol. 118, p. 181103, 2021.
4. D. Sych and G. Leuchs, "Practical receiver for optimal discrimination of binary coherent signals," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 117, p. 200501, 2016.
5. M. Elezov, M. Scherbatenko, D. Sych, and G. Goltsman, "Active and passive phase stabilization for the all-fiber michelson interferometer," *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 1124, p. 051014, 2018.
6. M. Shcherbatenko, M. Elezov, D. Sych, and G. Goltsman, "Towards the fiber-optic Kennedy quantum receiver," *EPJ Web Conf.*, vol. 220, p. 03011, 2019.
7. M. L. Shcherbatenko, M. S. Elezov, G. N. Goltsman, and D. V. Sych, "Sub-shot-noise-limited fiber-optic quantum receiver," *Phys. Rev. A*, vol. 101, p. 032306, 2020.
8. E. J. Candès, J. K. Romberg, and T. Tao, "Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements," *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 59, no. 8, pp. 1207–1223, 2006.
9. D. Donoho, "Compressed sensing," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 52, no. 4, pp. 1289–1306, 2006.
10. T. Shimobaba, Y. Endo, T. Nishitsuji, T. Takahashi, Y. Nagahama, S. Hasegawa, M. Sano, R. Hirayama, T. Kakue, A. Shiraki, and T. Ito, "Computational ghost imaging using deep learning," *Optics Communications*, vol. 413, pp. 147–151, 2018.
11. C. F. Higham, R. Murray-Smith, M. J. Padgett, and M. P. Edgar, "Deep learning for real-time single-pixel video," *Scientific Reports*, vol. 8, 2369, 2018.
12. A. L. Mur, P. Leclerc, F. Peyrin, and N. Ducros, "Single-pixel image reconstruction from experimental data using neural networks," *Opt. Express*, vol. 29, pp. 17097–17110, 2021.
13. S. Xie, L. Peng, and L. Bian, "Large-scale single-pixel imaging via deep learning," in *Optoelectronic Imaging and Multimedia Technology IX* (Q. Dai, T. Shimura, and Z. Zheng, eds.), vol. 12317, p. 1231703, International Society for Optics and Photonics, SPIE, 2023.

14. D. Sych, V. Averchenko, and G. Leuchs, "Generic method for lossless generation of arbitrarily shaped photons," *Phys. Rev. A*, vol. 96, p. 053847, 2017.
15. V. Averchenko, D. Sych, G. Schunk, U. Vogl, C. Marquardt, and G. Leuchs, "Temporal shaping of single photons enabled by entanglement," *Phys. Rev. A*, vol. 96, p. 043822, 2017.
16. V. Averchenko, D. Sych, C. Marquardt, and G. Leuchs, "Efficient generation of temporally shaped photons using nonlocal spectral filtering," *Phys. Rev. A*, vol. 101, p. 013808, 2020.
17. D. V. Strekalov, B. I. Erkmen, and N. Yu, "Ghost imaging of space objects," *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 414, p. 012037, 2013.
18. M. D. Aksenov and D. V. Sych, "Optimal data acquisition methods for single-pixel imaging," *Journal of Russian Laser Research*, vol. 39, no. 5, p. 492–498, 2018.
19. D. Sych and M. Aksenov, "Computational imaging with a single-pixel detector and a consumer video projector," *AIP Conference Proceedings*, vol. 1936, p. 020016, 2018.
20. D. Sych and G. Leuchs, "A complete basis of generalized Bell states," *New Journal of Physics*, vol. 11, p. 013006, 2009.
21. D. V. Sych, "Optimization of compressed sampling in single-pixel imaging," *Bull. Lebedev Phys. Inst.*, vol. 51, pp. 202–205, 2024.

Application of Hadamard Matrices for Single-Pixel Imaging

D.V. Sych¹

P.N. Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

¹ ORCID: 0000-0002-4188-0951, denis.sych@gmail.com

Abstract

Single-pixel imaging is a method of computational imaging that allows to obtain images of objects using a photodetector that does not have spatial resolution. In this method, the object is illuminated by light having a special spatio-temporal structure, — light patterns, and a single-pixel photodetector measures the total amount of light reflected from the object. The possibility of obtaining an image and the image quality are closely related to the properties of the applied patterns and computational algorithms. In this paper, we consider patterns obtained from modified Hadamard matrices and study the features of image calculation using single-pixel imaging. We show the possibility of reducing both the sampling time and the computational resources required to obtain images by modifying the pattern system. The proposed theoretical method can be used in the practical implementation of the single-pixel imaging method in an experiment.

Keywords: single-pixel imaging, computational imaging, Hadamard matrices.

References

1. M. F. Duarte, M. A. Davenport, D. Takhar, J. N. Laska, T. Sun, K. F. Kelly, and R. G. Baraniuk, “Single-pixel imaging via compressive sampling,” *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 25, no. 2, pp. 83–91, 2008.
2. E. E. Wollman, V. B. Verma, A. E. Lita, W. H. Farr, M. D. Shaw, R. P. Mirin, and S. W. Nam, “Kilopixel array of superconducting nanowire single-photon detectors,” *Opt. Express*, vol. 27, pp. 35279–35289, 2019.
3. M. Shcherbatenko, M. Elezov, N. Manova, K. Sedykh, A. Korneev, Y. Korneeva, M. Dryazgov, N. Simonov, A. Feimov, G. Goltsman, and D. Sych, “Single-pixel camera with a large-area microstrip superconducting single photon detector on a multimode fiber,” *Applied Physics Letters*, vol. 118, p. 181103, 2021.
4. D. Sych and G. Leuchs, “Practical receiver for optimal discrimination of binary coherent signals,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 117, p. 200501, 2016.
5. M. Elezov, M. Scherbatenko, D. Sych, and G. Goltsman, “Active and passive phase stabilization for the all-fiber michelson interferometer,” *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 1124, p. 051014, 2018.
6. M. Shcherbatenko, M. Elezov, D. Sych, and G. Goltsman, “Towards the fiber-optic Kennedy quantum receiver,” *EPJ Web Conf.*, vol. 220, p. 03011, 2019.
7. M. L. Shcherbatenko, M. S. Elezov, G. N. Goltsman, and D. V. Sych, “Sub-shot-noise-limited fiber-optic quantum receiver,” *Phys. Rev. A*, vol. 101, p. 032306, 2020.
8. E. J. Candès, J. K. Romberg, and T. Tao, “Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements,” *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 59, no. 8, pp. 1207–1223, 2006.
9. D. Donoho, “Compressed sensing,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 52, no. 4, pp. 1289–1306, 2006.
10. T. Shimobaba, Y. Endo, T. Nishitsuji, T. Takahashi, Y. Nagahama, S. Hasegawa, M. Sano, R. Hirayama, T. Kakue, A. Shiraki, and T. Ito, “Computational ghost imaging using deep learning,” *Optics Communications*, vol. 413, pp. 147–151, 2018.

11. C. F. Higham, R. Murray-Smith, M. J. Padgett, and M. P. Edgar, “Deep learning for real-time single-pixel video,” *Scientific Reports*, vol. 8, 2369, 2018.
12. A. L. Mur, P. Leclerc, F. Peyrin, and N. Ducros, “Single-pixel image reconstruction from experimental data using neural networks,” *Opt. Express*, vol. 29, pp. 17097–17110, 2021.
13. S. Xie, L. Peng, and L. Bian, “Large-scale single-pixel imaging via deep learning,” in *Optoelectronic Imaging and Multimedia Technology IX* (Q. Dai, T. Shimura, and Z. Zheng, eds.), vol. 12317, p. 1231703, International Society for Optics and Photonics, SPIE, 2023.
14. D. Sych, V. Averchenko, and G. Leuchs, “Generic method for lossless generation of arbitrarily shaped photons,” *Phys. Rev. A*, vol. 96, p. 053847, 2017.
15. V. Averchenko, D. Sych, G. Schunk, U. Vogl, C. Marquardt, and G. Leuchs, “Temporal shaping of single photons enabled by entanglement,” *Phys. Rev. A*, vol. 96, p. 043822, 2017.
16. V. Averchenko, D. Sych, C. Marquardt, and G. Leuchs, “Efficient generation of temporally shaped photons using nonlocal spectral filtering,” *Phys. Rev. A*, vol. 101, p. 013808, 2020.
17. D. V. Strekalov, B. I. Erkmen, and N. Yu, “Ghost imaging of space objects,” *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 414, p. 012037, 2013.
18. M. D. Aksenov and D. V. Sych, “Optimal data acquisition methods for single-pixel imaging,” *Journal of Russian Laser Research*, vol. 39, no. 5, p. 492–498, 2018.
19. D. Sych and M. Aksenov, “Computational imaging with a single-pixel detector and a consumer video projector,” *AIP Conference Proceedings*, vol. 1936, p. 020016, 2018.
20. D. Sych and G. Leuchs, “A complete basis of generalized Bell states,” *New Journal of Physics*, vol. 11, p. 013006, 2009.
21. D. V. Sych, “Optimization of compressed sampling in single-pixel imaging,” *Bull. Lebedev Phys. Inst.*, vol. 51, pp. 202–205, 2024.